Groupe d'isométries du cube et coloriage

Geoffrey Deperle

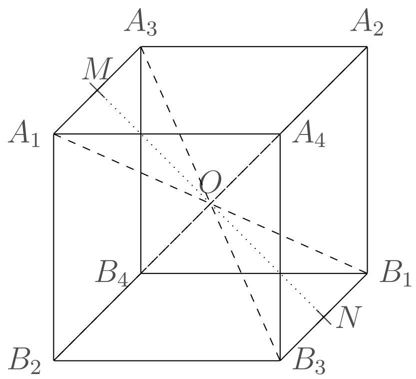
Leçons associées :
— 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
— 104 : Groupes finis. Exemples et applications.
— 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
— 161 : Distances dans un espace affine euclidien. Isométries.
— 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Les groupes d'isométrie du cube sont*

$$\mathrm{Isom}^+(C_6) \simeq S_4 \quad \mathrm{Isom}(C_6) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Preuve : On considère l'ensemble des 4 grandes diagonales du cube $\mathcal{D} = (D_1, D_2, D_3, D_4)$, elles sont conservées par les isométries (car ce sont les plus grandes distances entre deux points du cube).



On fait agir $\mathrm{Isom}^+(C_6)$ sur $\mathcal{D}$ avec

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathrm{Isom}^+(C_6) & \to & S(\mathcal{D}) \simeq S_4 \\ & & g & \mapsto & g_{|\mathcal{D}} \end{array}$$

Surjectivité :

Soit M le milieu de $[A_1, A_2]$ et N le milieu de $[B_1, B_2]$, la transposition $(D_1\, D_2)$ est réalisée par le retournement d'axe (MN). Donc $(D_1\, D_2) \in \mathrm{Im}\varphi$. De même toutes les transpositions appartiennent à $\mathrm{Im}\varphi$. Comme les transpositions engendrent S_4, φ est surjective.

Injectivité :

Soit $g \in \mathrm{Isom}^+(C_6)$ tel que $\varphi(g) = \mathrm{id}_{|\mathcal{D}}$. On a l'alternative suivante :

$$\forall i \in [\![1,4]\!], \begin{cases} g(A_i) & = A_i \\ g(B_i) & = B_i \\ & (*) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} g(A_i) & = B_i \\ g(B_i) & = A_i \\ & (**) \end{cases}$$

Supposons qu'il existe $i \in [\![1,4]\!]$ tel que $(**)$.
Sans perte de généralité, supposons $g(A_1) = B_1$.
Comme g conserve les distances et $\begin{cases} g(A_2) \in \{A_2, B_2\} \\ g(A_1)g(A_2) = A_1A_2 \end{cases}$ on a nécessairement $g(A_2) = B_2$ donc de même on a $(**)$ pour tout $i \in [\![1,4]\!]$ donc g coincide avec s_O sur un repère affine donc $\varphi = s_O$.
Absurde car $g \in \mathrm{Isom}^+(C_6)$.
D'où $\forall i \in [\![1,4]\!], g(A_i) = A_i$ et $g(B_i) = B_i$ donc $g = \mathrm{id}$ car coïncide avec id sur un repère affine.

Ainsi, $\mathrm{Isom}^+(C_6) \simeq S_4$, comme $[\mathrm{Isom}(C_6) : \mathrm{Isom}^+(C_6)] = 2$ on a par théorème d'isomorphisme la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Isom}^+(C_6) \to \mathrm{Isom}(C_6) \to \{\mathrm{id}, s_O\} \to 1$$

D'où $\mathrm{Isom}(C_6) \simeq S_4 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Or, s_O est central car commute avec toutes les transpositions donc $\{\mathrm{id}, s_O\} \lhd \mathrm{Isom}(C_6)$ donc le produit est direct :

$$\mathrm{Isom}(C_6) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

□

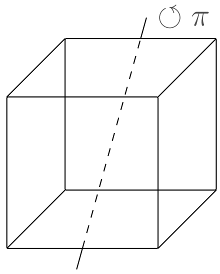
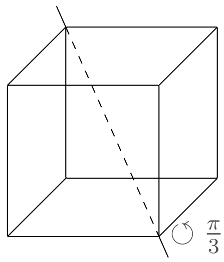
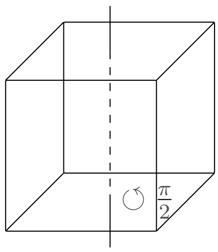
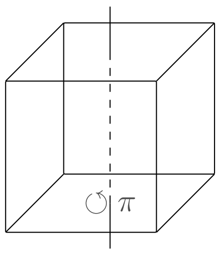
Application. *Il y a* 57 *manières de colorier un cube avec au plus* 3 *couleurs.*

Preuve : Soit ϕ l'ensemble des faces du cube,
Soit C un ensemble de couleurs (notons n son cardinal),
Un coloriage est une fonction $f \in \mathcal{F}(\phi, C)$,

On fait agir le groupe d'isométrie direct G sur $\mathcal{F}(\phi, C)$ par $(g, f) \mapsto (x \mapsto f(g^{-1}x))$ et on s'intéresse aux orbites de cette action.
D'après la formule de Burnside, le nombre d'orbite est :

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

Or, $f \in \mathrm{Fix}(g) \iff \forall x \in \phi, f(g^{-1}x) = f(x)$ (f est invariant par g).
Dénombrant alors les coloriages invariant sous l'action de g. Il est clair que ce nombre est constant sur la classe de conjugaison de g. Nous allons donc dénombrer $|\mathrm{Fix}(g)|$ pour g dans chaque classe de conjugaison.

Transpositions (6 éléments) : Il s'agit d'une rotation d'angle π d'axe la droite passant par le milieu des arêtes reliant les diagonales.		Il suffit de choisir une couleur pour chaque face latéral, une couleur pour la face de devant et la face de dessous et une couleur pour la face du dessus et la face opposée. Il y a n^4 possibilités.
3-cycle (8 éléments) : Il s'agit d'une rotation autour de la diagonale D_i qui n'intervient pas dans		Il faut et il suffit que les trois faces qui s'intersectent soient de la même couleur. Il y a n^2 possibilités.
4-cycle (6 éléments) : Il s'agit d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe passant par le centre de deux faces opposées.		Il faut et il suffit choisir une couleur pour la face du haut, une couleur sur la face du bas et une couleur pour les faces latérales. Il y a n^3 possibilités.
Double transpositions (3 éléments) : Il s'agit d'une rotation d'angle π autour de l'axe passant par le centre de deux faces opposées.		Il faut et il suffit choisir une couleur pour la face du haut, la face du bas et une couleur pour la face lateral avant et la face latéral arrière, et une couleur pour les faces latérales des côtes. Il y a n^4 possibilités.

D'où le nombre de coloriage est $k = \dfrac{1}{24}(n^6 + 6n^4 + 8n^2 + 6n^3 + 3n^4)$. Pour $n = 3$, on obtient $k = 57$. □

Conseil de présentation 1. Lors d'une présentation à l'oral en 15 minutes, on pourra au préalable retenir le nombre d'éléments dans chaque de conjugaison (colonne 1) et expliquer à l'oral uniquement avec des dessins comment obtenir $|\mathrm{Fix}(g)|$ pour g dans chaque classe de conjugaison (colonne 3).

Références

[1] Jérome Germoni Philippe Caldero. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome premier*. Calvage Mounet, 2013.